# Egy nyitott, valós szituáción alapuló feladat variációi az oktatásban és a didaktikai kutatásban

**Ambrus Gabriella**
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

*A matematikatanításban a feladatok[1] kiválasztásánál alapvető szempontok a tanítandó tananyag, és annak a csoportnak a szintje, akik majd részt vesznek a megoldásban. Vannak azonban olyan feladatok, amelyek jellegüknél fogva többféle módon is megoldhatók, és a megoldások aszerint is különböznek, hogy milyen feltételek mentén készültek – ezek az úgynevezett nyitott feladatok. Felhasználásuk és jelentőségük a matematikaoktatásban évtizedek óta kutatott téma. Ebben a témában én is évek óta végzek kutatásokat, melyhez egy alsó tagozatosoknak készült feladatomat (Ambrus, 2010) használom fel. A matematikai tartalmát megtartva, különféle szövegváltozatokat alakítottam ki. Vizsgálataim a felső tagozatosokon túl a középiskolai korosztályra, sőt a tanárszakos hallgatókra is kiterjednek. Bár a matematikai tartalom csekély, mégis nehéznek bizonyul általában a feladat megoldása, amelynek egyik oka, hogy a matematika-tankönyvek és -órák csupán ritkán foglalkoznak nyitott feladatokkal.*

***Kulcsszavak:*** *nyitott feladatok, valóságközeli szituáción alapuló feladatok, szöveges feladatok, probléma variációk*

## Bevezetés

A szöveges feladatok megoldása nem könnyű. A szöveg megértése, az összefüggések átgondolása, a megfelelő matematikai ismeret kiválasztása és helyes alkalmazása majd az eredmény összevetése a feladat kérdésével, amihez az ellenőrzés is hozzátartozik (kielégíti-e a feltételeket), nemcsak komplex feladat, de lépésenként is komoly próbatétel lehet.

A tanulók általában igyekeznek egyszerűsíteni és minél sikeresebbé tenni munkájukat, ezért különböző stratégiákat keresnek a megoldáshoz. Ezek között jelentős helyet foglalnak el azok, amelyek a szöveg gyors átolvasása során a „helyes művelet“ megtalálására koncentrálnak és ehhez különböző „kulcsszavakat” keresnek (*Reusser és Stebler,* 1997), hiszen leggyakrabban erre van szükség a szövegbe öltöztetett számfeladványok megoldása során.

De mi a helyzet, ha ez a művelet nem is adhat megfelelő választ a feladat kérdésére, hiszen a megoldás további feltételektől is függ, és ezek mentén több helyes megoldás is lehetséges? Ugyanis olyan feladatról van szó, ami nyitott.

## Elméleti háttér

A magyar oktatási gyakorlatban főleg olyan feladatok szerepelnek, amelyek zártak, vagy zártnak tűnnek (*Ambrus*, 2004), noha a nyitott feladatok a matematika tanítása szempontjából fontosak (*Pehkonen*, 1995; *Munroe,* 2015).

A „nyitott közelítés” tanítási módszerét, melynek lényege nyitott végű problémák alkalmazása a matematikaórán a „matematikai” vitakészség fejlesztése céljából, Japánban dolgozták ki a XX. század hetvenes éveiben. Ezzel egy időben lettek népszerűek Angliában a kutatási, illetve matematikai vizsgálatokkal kapcsolatos feladatok a matematika tanításában (*Silver*, 1995).

### *a) Nyitott és zárt feladatok és kapcsolatuk*

Ha egy feladatban mind a kiindulási feltételek, mind az elérendő cél pontosan meghatározott, zárt feladatról beszélünk. Ha azonban

[1] A „feladat” és a „probléma” fogalmak a tanulmányban felváltva szerepelnek, és használatuk nem különül el élesen a téma jellege miatt.

DOI 10.31074/gyn201815565


Ambrus Gabriella: orcid.org/0000-0003-4302-5577

a kiindulás vagy a végállapot közül az egyik, vagy akár mindkettő nem ilyen, a feladat nyitott. A feladatok kezdeti és végállapota szerinti besorolásához többféle „feladattípus" megadható (*Pehkonen*, 1995).

Általánosabb értelmezés szerint azok a feladatok is nyitottnak tekinthetők, amelyeknél a kezdő és végállapot pontosan meghatározott, de többféle megoldás lehetséges (*Blum és Wiegand,* 1999). A kezdeti és végállapot illetve a megoldási mód egyértelműsége (ismertsége) alapján a feladatok típusokba is sorolhatók (*Büchter és Leuders*, 2005), aminek jelentőségét nem a kategóriák pontosítása adja, hanem – ennek révén – a különböző feladattípusok tudatos alkalmazása/készítése.

A hazai oktatási gyakorlatban jelen vannak a nyitott feladatok, hiszen optimális esetben egy matematikaórán még egyszerű feladatok esetén is gyakran hangzik el a „Te hogyan gondolkodtál?" vagy „Kinek van másik megoldása?" kérdés. Az érkező válaszok nemcsak a tananyag elsajátításának mértékéről adnak felvilágosítást, hanem a tanulók gondolkodásmódjáról is, és gyakran születnek különböző megközelítések alapján, lényegileg különböző megoldások. Azonban a nyílt és zárt feladatok nem feltétlenül különülnek el élesen egymástól, de az fontos is, hogy különböző módszertani célokhoz különböző jellegű feladatok kapcsolódjanak.

**1. Példa**
***Alapfeladat***

Számítsd ki:
4-102-6+26+6=

*1. Nyílt változat:*
Számítsd ki többféle módon az előbbi feladatot!

*2. Nyílt változat:*
Helyezz el zárójeleket és oldd meg a kapott feladatokat!
4-102-6+26+6=

*3. Nyílt változat:*
Fogalmazz meg olyan szöveges feladatot, amely a következő módon oldható meg:
4-102-6+26+6=

Az alapfeladat egyszerű számolás. Ha a tanár elsősorban a helyes műveletvégzésre kíváncsi – tehát az eredményt kérdezi csupán –, akkor zárt feladatként kezeli, hiszen a megoldási utat is adottnak veszi. A feladat célja ebben az esetben a számolási rutin begyakorlása. Ha azonban azt is megkérdezi, hogy ki hogyan gondolkodott, akkor már többféle eljárás is felmerülhet – tehát a feladatot nyitottként kezelte.

Az *első nyílt változatban* eleve nyitott feladatként adtuk fel a számítást, utalva arra, hogy többféle számítási mód megtalálása is feladat.

A *másik két nyílt változatban* pedig az eredeti feladat két olyan variációja szerepel, ami a feladatot szintén eleve nyitottá tette, de egyúttal további kiegészítéssel.

Ha nyilvánvaló, hogy nyitott a feladat, akkor sem egyszerű kezelni a nyitottságot, hiszen mint a példán is láttuk, tovább kell gondolkodni rajta, ötletekre, több számolásra van szükség.

***b) Valós/ elképzelhető helyzeten alapuló nyitott feladatok***

Valós helyzeten alapuló feladatok látszólag gyakran szerepelnek a matematika oktatásában, hiszen sok feladat szól mindennapi élettel kapcsolatos dolgokról, esetleg állatokról, növényekről. Ezek azonban sokszor nem valós adatokkal dolgoznak, illetve a megoldásuk során a szöveges feladatoknál már említett „beöltöztetett" művelet(sor) megtalálása a legfőbb cél. Több felmérés született már azzal kapcsolatban, hogy a szöveges feladatok megoldása során a tanulók rutinszerűen dolgoznak, a valós tartalmat figyelmen kívül hagyják (*Puchalska és Semadeni* 1987; *Verschaffel,* 1994; *Csíkos, Kelemen és Verschaffel*, 2011).

Egyszerű feladatok esetén is gyakran elfelejti a megoldó, miről is szól a feladat szövege, és a megadott számok, valamint a feltett kérdés között összefüggést próbál teremteni, de nem feltétlenül a szituáció átgondolásával.

2. Példa

a. Egy ember kötelet szeretne kifeszíteni két, egymástól 12 méterre levő rúd között, de csak 1,5 méteres darabok vannak. Hány darabot kellene ezekből összekötöznie, hogy átérjen a két rúd között?

b. Karcsinak 5 barátja van, Gyurinak pedig 6. Karcsi és Gyuri úgy döntöttek, hogy együtt rendeznek egy bulit. Meghívták valamennyi barátjukat, akik mind el is jöttek. Hányan voltak ott a partin?

A köteles feladatban a már korábban említett „keresett művelet" az osztás. A kapott eredmény egész szám, és látszólag rendben is van a dolog, hiszen 8 darab 1,5 m-es kötél jött ki és, ugye, ezt is kérdezte a feladat? Sajnos nem ezt, hiszen összekötésről is szó volt, amihez további kötélre van szükség – de ehhez meg kell gondolni, ez mennyi lehet, azaz figyelembe kell venni a valóságos helyzetet is.

A második feladatban látszólag még egyszerűbb a helyzet, csak összeadni kell egyjegyű számokat és 5+6+2=13 (látszólag) a helyes válasz. A valóságban azonban figyelembe kell venni, további feltételeket, hogy lehetnek például közös barátok, lehet, hogy a barátok közé már Karcsi és Gyuri is bele lett számítva.

A valós szituációkon alapuló nyitott feladatok – modellezési feladatok – megoldása ciklikus folyamatként képzelhető el, mely több vagy csak néhány lépésből áll (*Burkhardt,* 1994; *Blum és Niss,* 1991; *Verschaffel et al.* 2000; *Blum,* 2007; *Verschaffel,* 2010).

Az iskolai használatra Blum az egyszerűbb, négy lépéses modellezési ciklust (*Blum*, 2008) ajánlja, melynek lépései: 1. Feladat megértése, 2. Modell készítése, 3. A matematika alkalmazása, 4. Az eredmény értékelése. Az utóbbi lépés után szükség esetén megint az 1. lépés következhet – például abban az esetben, ha az alkalmazott modell helytelen eredményhez vezetett, vagy a kapott eredmény még „pontosításra" szorul, amelyhez a kezdeti feltételek alakítása szükséges.

## A felmérés alapfeladata és variációi

**Alapfeladat:**

*A királyné ruhái*

- Amióta a fiatal királyné a palotába költözött, minden héten új ruhát varratott. Hány napja lakik ott, ha már 35 új ruhája van?

(*Ambrus,* 2010, 25. o.)

*Lehetséges megoldás:*

Várható válasz a 245, 35 héttel „számolva", hiszen 35-ször 7 = 245. De mi van, ha esetleg nem 35 teljes hét telik el, hiszen az is lehet, hogy miután megkapta a 35. ruhát, még további napok is eltelnek a következő, a 36. ruháig?

Először is szükséges a szituáció megismerése, feltételek tisztázása: (nyitott helyzet, 34 teljes hét és valamennyi nap még). Tegyük fel, hogy mindig a hét ugyanazon a napján kapta az új ruháját, az elsőt mindjárt érkezéskor. Majd elkészülhet a matematikai modell: 7·34 és még néhány nap de nem több, mint egy hét.

Ezt követi a számítás a modell alapján, azaz 7·34=238 a teljes hetek alatti napok száma, és ehhez még hozzájön legalább 1, de akár 2, 3, 4, 5, 6, 7 nap, attól függően, hogy hány nap telt el a 35. ruha „óta". Azaz (helyesen) 239 nap legalább, és 245 nap legfeljebb az eredmény.

Az eredmény értékelése során kiderül az is, hogy akár 245 napnál is hosszabb ideje lehet ott, ha például más napon kapja a ruhát.

Ha tehát pontosabban szeretnénk megmondani, hány napja lakik ott, további feltételek kellenek.

A 245 tehát értelmetlen válasz egy egyszerű kérdésre? Nem, itt másról van szó, hiszen a 245 *egy lehetséges jó értéket ad* meg. Viszont a gond az, hogy az eredmény csak bizonyos feltételek között igaz, további/más feltételekkel más jó válaszok is lehetségesek, ami éppen a szituáció valóságközeli voltából, illetve a feladat nyitottságából adódik.

Az előbbi feladat tartalmában azonos szövegváltozata a következő:

*Zsebpénz*

- Amióta Pistiék új lakásba költöztek, hetente kapja a zsebpénzét, 1000 forintot, amit azóta mindig félre is tesz.
  Hány napja laknak ott, ha már 35 000 forintot gyűjtött így össze.

Bár az előbbi két feladatváltozat matematikai tartalma csekély, feltételek meghatározása és ezekhez a megfelelő megoldások elkészítése, rendszerezése már komoly feladat lehet a 14–18 éves korosztálynak is.

Például, nézzük a következő lehetséges feltételek alapján adódó megoldásokat az utóbbi szöveghez, ahol a „hét” naptári hét értelemben használatos:

1. Mindig a hét ugyanazon napján kapja a pénzt, és tudjuk, hogy a hét mely napján költöztek be.

Így például, ha hétfőn költöztek be, és mindig hétfőn kapja a zsebpénzt, akkor a következő megoldást kapjuk: Legalább 239 nap (34 teljes hét, 238 nap, +1 nap) és legfeljebb 245 nap.

2. Mindig a hét ugyanazon napján kapja a zsebpénzt és nem tudjuk melyik napon költöztek be az új lakásba. Így adódik az a megoldás, hogy legalább 239 napja és legfeljebb 251 napja lakhatnak ott.

3. Ismeretes melyik napon (a héten) költöztek be és a zsebpénzt a hét bármelyik napján kaphatja.

4. Nem ismeretes a hét mely napján költöztek be, és az sem, hogy melyik napon kap zsebpénzt. Így adódik a következő megoldás: Legalább 233 nap és legfeljebb 251 nap.

A két utóbbi feltétel szerinti megoldást részletezi a következő táblázat.

| Érkezési nap | Tartózkodás legalább | legfeljebb |
|---|---|---|
| Hétfő | 34×7+1= 239 | 35×7+6= 251 |
| Kedd | 6+33×7+1= 238 | 6+34×7+6= 250 |
| Szerda | 5+33×7+1= 237 | 5+34×7+6= 249 |
| Csütörtök | 4+33×7+1= 236 | 4+34×7+6= 248 |
| Péntek | 3+33×7+1= 235 | 3+34×7+6= 247 |
| Szombat | 2+33×7+1= 234 | 2+34×7+6= 246 |
| Vasárnap | 1+33×7+1= 233 | 1+34×7+6= 245 |

*1. táblázat:* Rögzített napon érkezett a család, de a hét bármelyik napján kaphat zsebpénzt Pisti (a héten egyszer)

A táblázatból kiolvasható, hogy például hétfői érkezés esetén, ha rögtön aznap zsebpénzt is kap Pisti, akkor 34 teljes hétnek legalább el kell telnie 34 heti zsebpénzhez, viszont minimum 1 további nap (akkor kap megint zsebpénzt) legalább szükséges. A hozzáadható napok száma viszont legfeljebb 6, hiszen a legkésőbb a 7. napig meg kell kapnia a 36. heti zsebpénzt.

Ha egyik feltételt sem rögzítjük (4. eset: a hét bármelyik napján érkezhetett és bármikor kaphat zsebpénzt egy adott héten), akkor a fenti táblázat két szélső értéke, azaz minimum 233 nap és maximum 251 nap a megoldás.

A feladat lehetséges megoldás(ai)hoz kevés matematikai ismeret szükséges, viszont különböző szinten készíthető(k) el és a szituáció is könnyen elképzelhető. Így ez a feladat (esetleg a két variáció felhasználásával) alkalmas arra, hogy különböző kutatási kérdéseket vizsgáljunk a feladattal kapcsolatban a korosztályok széles skáláján.

## Korábbi vizsgálatok

Tanulók és egyetemisták között azt vizsgáltuk, hogy mennyire képesek felismerni (és kezelni) a „A királynő ruhái", illetve a „Zsebpénz" feladat nyitottságát. Egy megoldást „nyitott"-nak tekintettünk, ha megjelenik benne (esetleg pontatlanul és hibákkal) hogy a feladatnak többféle jó megoldása is lehet. Például feltételt ad egyetlen számszerű eredményhez.

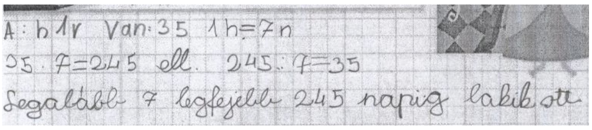
A résztvevőktől azt kértük, hogy a királynős/zsebpénzes feladatot önállóan oldják meg. A megoldáshoz semmilyen segítséget nem kaptak és név nélkül dolgozhattak. Időkorlát nem volt, de általában 10–15 percnél tovább nagyon kevesen akartak dolgozni. A megoldások beadása után az esetek többségében röviden megbeszélésre került néhány lehetséges megoldás. A felmérést részben a szerző, részben erre vállalkozó kollégák végezték.

Az *első vizsgálatokra* Németországban, Finnországban és Magyarországon került sor a „Királynő ruhái" feladattal (2010–2011), ebben 103 tanuló a 3. osztályokból és 216 tanuló a 4. osztályokból vett részt. A megoldások kiértékelése után részletes hibavizsgálat is készült. A vizsgálatban – Radatz hibakategóriáinak (*Radatz,* 1979, idézi *Ambrus és Szűcs,* 2016) felhasználásával – a tanulói hibákat elemeztük aszerint, hogy az illető zártan (feltételezve az egyetlen megoldás lehetőségét) vagy nyitottan (feltételezve feltételtől függően változó megoldás lehetőségét) gondolkodott (*Ambrus és Szűcs,* 2016).

| | Nyitott feladat-ként értelmezi | Zárt feladat-ként értelmezi | Nincs válasz | Összesen |
|---|---|---|---|---|
| 3. osztályból | 16 | 65 | 22 | 103 |
| 4. osztályból | 22 | 183 | 11 | 216 |
| Összesen | 38 | 248 | 33 | 319 |

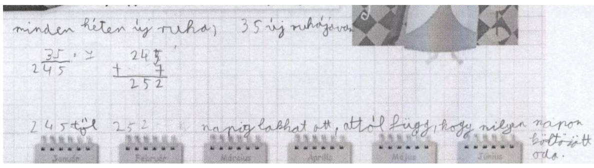
*2. táblázat:* Az első vizsgálatok eredményei német, finn és magyar alsó tagozatosok körében

Ahogy az a *2. táblázatból* látszik, a tanulók mintegy 10%-a értelmezte nyitottként a feladatot. A megoldásokban sok számolási hiba is akadt, és a nyitottnak tekinthető megoldások „színvonala” is igen különböző volt.



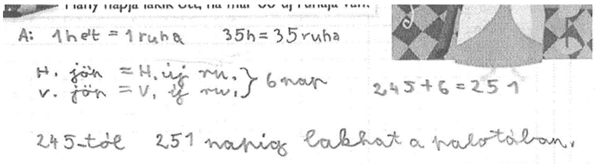

*1. ábra:* 3. osztályos tanuló megoldása

Az *1. ábrán* látható megoldásnál a kapott eredmény mellett válaszként megjelenik a sejtés, hogy a tanuló vélhetően nyitottnak értelmezte a feladatot, hiszen egy intervallumot ad meg megoldásul.




*2. ábra:* 4. osztályos tanuló megoldása

Ennél a tanulónál (*2. ábra*) a megoldásból látszik, hogy a kapott 245-ös eredmény után meggondolta, hogy akár további napok is eltelhettek még, és a ruhák száma nem gyarapodott. Azonban megfeledkezik arról, hogy a 7. napon már van újabb ruha.




*3. ábra:* 4. osztályos tanuló megoldása

A tanuló (l. *3. ábra*) feltételt is ad (2 példával): a királynő az érkezés napján kapja meg az első ruháját. Bár nem írja, de feltételezi, hogy ezek után mindig pontosan egy hét múlva ezen napon kapja a további ruhákat, így 35 teljes hét telik el, míg 35 ruhája van. A 246. napon ebben az esetben már a 36. ruhát kapná, de erről nem szól a megoldás. Viszont hozzáad legfeljebb 6 napot a 245-hoz, és ezzel gyakorlatilag az előbbi megoldás szerint gondolkodik. A tanulónál megjelenik tehát a nyitott gondolkodás, de ezzel kapcsolatos gondolatait rendezni még nem tudja.

A „A királynő ruhái” feladatot 5. és 6. osztályos tanulók is megoldották néhány magyar és német osztályban: a „nyitottság” felismerése némileg csökkent, annak ellenére, hogy magasabb évfolyamokról volt szó, a számolási hibák mennyisége azonban jelentősen csökkent.

Az előbbiek alapján egyrészt felmerült a kérdés, hogy vajon hogyan oldják meg a feladatot további korosztályok, másrészt az derült ki, hogy a megoldások kiértékelésénél „szélesebb korsáv”-okat is lehet használni, ugyanis a megoldások a nyitottság észlelése szempontjából nem mutattak jelentős eltérést minden korosztály esetében.

A kísérletben részt vevő tanítók és tanárok beszámoltak esetenkénti érdektelenségről is, amelyet a megoldás során tapasztaltak. Ezt a szövegezésnek tulajdonították. Több osztályban utóbb komoly vitát is kiváltott a kérdés, hogy miért kell a királynőnek ilyen sok ruha. Ezért egy másik szövegváltozat készült el, ezúttal „pénzes” témában, amely egyrészt érdekesebb téma, amely segítheti a megoldást is (*Mérő,* 2011), másrészt az idősebb korosztályoknak is megfelelőbb (l. „Zsebpénz” feladat).

*További felmérésekre* került sor 2012 és 2014 között magyar résztvevőkkel a „Zsebpénz” feladattal, amelyben egy kisvárosi általános iskola 6–7. osztályos 101 tanulója, budapesti „átlagosnak” mondható gimnáziumokból 9–12. osztályosok közül 45 tanuló, valamint 1. éves budapesti 136 egyetemista vettek részt. A vizsgálati feltételek ugyanazok voltak, mint az előző esetben és a vizsgálat célja is.

A feltételezés az volt, hogy a felsőbb iskolai osztályokban, illetve az egyetemen a tanulók/

egyetemisták a feladat nyitottságát könnyebben felismerik, hiszen egyrészt egy számukra bizonyára könnyen elképzelhető/átlátható szituációról van szó, másrészt a szükséges számolás már biztosan rutineljárás, tehát semmi gondot nem okoz, így különösen a középiskolai osztályokban módjuk van arra, hogy a rendelkezésre álló időt a szituáció alapos átgondolására fordítsák.

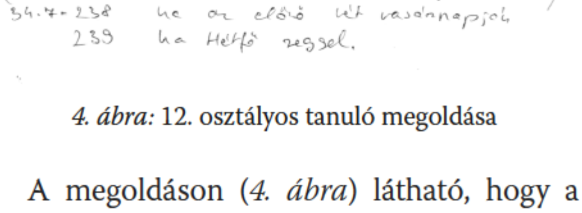
| Tanulók | 6–7. osztály | 9–10. osztály | 11–12. osztály |
|---|---|---|---|
| Nyitott feladatként kezeli | 2 | 4 | 9 |
| Egyéb | 99 | 18 | 14 |
| Összesen | 101 | 22 | 23 |
| **Egyetemisták** | **Biológia szakos** | **Matematika szakos** | **Matematika tanári** |
| Nyitott feladatként kezeli | 10 | 31 | 34 |
| Egyéb | 40 | 7 | 12 |
| Összesen | 50 | 38 | 48 |

*3. táblázat:* Eredmények a további felmérések során, magyar tanulók és egyetemisták körében 2012–2014.

A táblázatból látható, hogy a feltételezésünk – a vizsgált körben – részben igazolódott, hiszen a feladatot valóban jelentősen többen kezelték nyitottan.

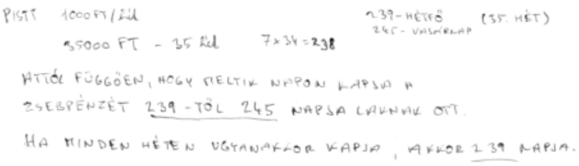
Bár ez a felmérés sem volt reprezentatív és a létszámok alapján is megalapozatlan lenne következtetéseket levonni, úgy tűnt bizonyos körülmények, például felsőbb korosztály, matematika-irányultság, javítja az eredményeket. A megoldások azonban változatosan alakultak.

Több dolgozatban megjelenik a feltételtől függő eredmény gondolata, ha nem is mindig tökéletesen, ahogy az a következőkben idézett tanulói megoldásokból is látszik.



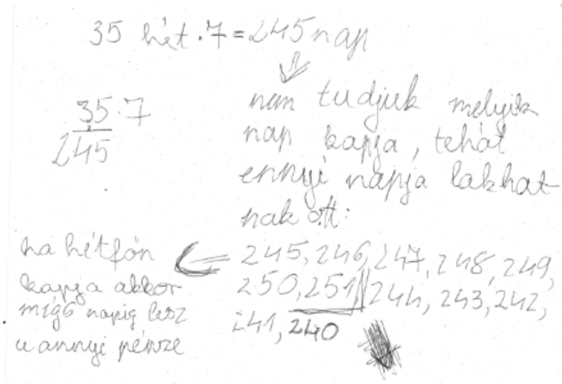

*4. ábra:* 12. osztályos tanuló megoldása

A megoldáson (*4. ábra*) látható, hogy a tanuló felismerte a feltételek megfogalmazásának szükségességét. Feltételként a zsebpénz megkapásának napját jelöli meg két konkrét eset tárgyalásával. Nem adja meg, hogy szerinte van-e még ilyen feltétel mellett más eset is, és nem jelenik meg az a lehetőség, hogy az adott nap előtt és után is van olyan időszak, amikor már ott lakhattak.




*5. ábra:* 12. osztályos tanuló megoldása

A megoldás (*5. ábra*) itt is feltételként a zsebpénz megkapásának napját jelöli meg. Az is látszik, hogy csak ezt a lehetőséget vizsgálja, hiszen, ha 239 napot ad meg arra az esetre, amikor Pisti mindig ugyanazon a napon és hétfőn kapta a zsebpénzt Ez azt is jelenti, hogy 34 teljes hét telik el addig, míg elkövetkezik az a nap, amikor megkapja az utolsó, 35. zsebpénzt, azaz összesen 238+1 nap. Ha a héten máskor kap pénzt mindig, akkor viszont további napokat kell hozzászámítani (legfeljebb további 6 eset lehetséges).




*6. ábra:* 6. osztályos tanuló megoldása

Ebben a megoldásban (*6. ábra*) a zsebpénz megkapásának feltételeként jelenik meg a teljes hét ott töltése, de megjelenik az a gondolat is, hogy akár 6 napig is ott lakhat még Pisti, amíg a következő heti zsebpénzt megkapja. Nem világos azonban, hogy a 251 utáni számok mire vonatkoznak – talán visszafelé számol, és arra gondol, hogy már akár az első zsebpénz megkapása előtt is ott lakhattak, de erről nem ír semmit.

Az egyetemisták esetében elmondható, hogy bár a felmérésben részt vett hallgatók esetében a biológiaszakosokhoz képest tapasztalható javulás a matematikaszakosoknál, azonban náluk sem természetes a „nyitottság" észrevétele, azaz a szituáció átgondolása – és ezt a 2016-ban végzett újabb (ezúttal németországi egyetemista csoportok bevonásával kiegészített) felmérések is alátámasztották, ahogy ez a *4. táblázatból* látszik.

| | magyar matematika tanárszakos hallgató I. éves | magyar matematika tanárszakos hallgató III. éves |
|---|---|---|
| nyitottnak kezeli | 21 | 2 |
| egyéb | 11 | 25 |
| **összesen** | **32** | **27** |
| | német matematika tanárszakos hallgató 4–6. féléves | német tanító szakos hallgató 6. féléves |
| nyitottnak kezeli | 8 | 3 |
| egyéb | 16 | 44 |
| **összesen** | **24** | **47** |

*4. táblázat:* A 2016-os vizsgálat eredményei magyar és német egyetemisták körében

A felsőbb osztályokban sem egyértelmű a „javulás", még ha a korábbi mérés szerint esetleg úgy is tűnik (*3. táblázat*), hiszen 2016-ban egy vidéki város gimnáziumában 9. és 10. osztályosok körében végezve a felmérést, 74 tanuló közül csak 6 olyan akadt, aki „nyitott"-nak értékelhető megoldást adott a „Zsebpénz" feladatra.

Átnézve az eddigi eredményeket a kép nemcsak változatos, de elgondolkodtató is. Egyrészt kiderült, hogy már kis mintán is látszik, hogy a feladat „nyitott" voltának felismerése nem a felsőbb évfolyamok kiváltsága, másrészt gyanítható, hogy a matematika iránti érdeklődés csak egy tényező (lehet) azok között, amelyek befolyásolják a megoldást.

Az eredmények hátterében az iskolai feladatkultúrával, a feladatok kezelésével kapcsolatos problémák is állhatnak. Egyrészt a valóban valós szituáción alapuló feladatok mennyisége, illetve ezek megfelelő kezelése lehet, hogy elmarad a kívánatostól. A tanulók matematikával szembeni beállítottsága is jelentősen befolyásolhatja a megoldás módját.

## A legújabb felmérés és első eredményei

Az eddigi eredmények alapján egyrészt felmerült, hogy pontosabb következtetéshez pontosabb mérési feltételek mellett, statisztikai módszerekkel kellene az összefüggéseket vizsgálni (például matematikai teljesítmény, érdeklődés a matematika iránt, évfolyam, megoldó neme) tekintetében. Másrészt az is, hogy majd ezekre a pontosabb vizsgálatokra alapozva fontos lenne olyan iskolai fejlesztési, illetve tanár-(tovább)képzési anyag kidolgozása, amely a valós tartalommal bíró szöveges feladatok realisztikus megoldását tűzné ki célul.

*Magyar Tudományos Akadémia kibővített szakmódszertani pályázat*ának *(2016–2020) keretén belül – A Komplex Matematikatanítás a XXI. században – A matematikai gondolkodás fejlesztése a legújabb kutatási eredmények alapján* – kutatócsoport[2] tagjaként nyílt lehetőségem az előbbi kutatás megkezdésére. A kutatócsoporton belül létrehozott kisebb tematikus csoportok közül a 3. csoport[3] foglalkozik a témával. A fő célunk annak vizsgálata, hogy a tanulók mennyire „nyitottan" képesek gondolkodni, hogyan tudnak nyitott, valós tartalmú szöveges feladatot kezelni, valamint annak kutatása, hogyan fejleszthető tanulók és tanárszakos, hallgatók gondolkodása ezen a téren.

Mindenekelőtt az eddigi eredményekre alapozva egy nagymintás iskolai vizsgálat megtervezésére és kivitelezésére került sor.

Felmérést a – jelenlegi kezdeti fázisban – először tanulók körében (2–10. osztályig) a „Zsebpénz" feladattal, illetve annak alkalmas

[2] Honlap: https://sites.google.com/view/mtakomplexmat

[3] Tagjai: Ambrus Gabriella, Csíkos Csaba, Emese György, Kovács Zoltán, Kónya Eszter, Szitányi Judit, Varga Eszter.

változatával végeztük 2017 első felében. Ehhez kérdőív is társult, amelyet a csoport tagjainak és gyakorló pedagógusok részvételével alakítottunk ki, és segítségével konkrétan a feladatra vonatkozó kérdéseken kívül s megoldó matematikával szembeni beállítottságával, illetve teljesítményével (osztályzat) kapcsolatban teszünk fel kérdéseket.

A tervek között további felmérések is szerepelnek tanár- és tanító szakos hallgatók körében – szintén kérdőívvel.

*Fő kutatási célunk ebben a felmérésben az, hogy hogyan alakul a tanulók realisztikus (a szituáció szempontjából helyesnek tekinthető) válaszadása a 2–10. évfolyamokon, és megoldásuk hogyan függ össze egyéb tényezőkkel (például osztályzat vagy matematikai érdeklődés).*

Az előzetes tapasztalatok alapján

- az alsó tagozaton évente, de ezután a magasabb évfolyamokon csak két évenként választottunk évfolyamot vizsgálatra,
- figyelembe vettük, hogy a számolás gondot okoz alsó tagozaton, de még hatodik osztály környékén is, ezért egy kisebb számkörben megoldható szövegváltozatot alkalmaztunk az alsóbb osztályokban, illetve a 6. osztályban az osztályok egyik fele a kisebb számkörben mozgó „Aranypénz”, míg a másik fele a „Zsebpénz” feladatot oldotta meg.
- Nyilvánvaló volt, hogy elég nagy minta kell, ha a „realisztikus” megoldásokat is külön vizsgálni akarjuk – hiszen ilyen viszonylag kevés várható.
- Mivel feltételezhető kapcsolat a matematikában elért teljesítmény, valamint a matematikáról való vélekedés és a feladatmegoldás „minősége” között, ezért a már említett kérdőíven ezzel kapcsolatos kérdések is szerepelnek.

### A felmérés körülményei

A felmérés a 2., 3., 4., 6., 8., 10 osztályokban végeztük. Az iskolák kiválasztásánál szempont volt, hogy minél többféle intézménytípus szerepeljen (általános iskola, gimnázium, szakgimnázium). A választott iskolában legalább egy teljes évfolyam részt vett a felmérésben, hogy az osztályok/tanulócsoportok ne valamilyen szelekció alapján kerüljenek be.

A hatodik évfolyamon, ahol egy iskolában az osztályok egyik fele – véletlenszerű választás alapján – a „Zsebpénz”, a többiek a másik, kisebb számkörben készült változatot (*7. ábra*) oldották meg. A 2., 3., és 4. évfolyamokon szintén az utóbbi feladat került megoldásra.

*Név:*____________________ *Osztály:*______

*Születési dátum:* *év* *hónap* *nap*

A király új inasának a bére hetente egy aranyforint, amit az inas félretesz.

Hány napja van az inas a király szolgálatában, ha már 6 aranyforintot kapott tőle?

Kérjük, indokold meg válaszodat!

*7. ábra:* Az „Aranypénz” feladat a tanulói lapon

*név:* *Osztály:*

*Születési dátum (év, hónap, nap):*

Amióta Pistiék új lakásba költöztek, hetente kapja a zsebpénzét, 1000 Forintot, amit azóta mindig félre is tesz.

Hány napja laknak ott, ha már 35 000 Forintot gyűjtött így össze?

Kérjük, indokold meg válaszodat.

*8. ábra:* A „Zsebpénz” feladat a tanulói lapon

A kivitelezés előkészítéséhez az iskolák kiválasztása után részletes útmutató készült tanároknak és diákoknak. A felmérés idejét az egyes iskolákban úgy alakítottuk ki, hogy az lehetőleg egy vagy két egymás utáni órában az egész iskolában megtörténjen.

A megoldásra, ahogy a korábbiak során, most is legalább 10 perc rendelkezésre állt, néhány perc hosszabbításra lehetőség volt. A feladatmegoldás után került sor a kérdőív kitöltésére, amely a matematikával és annak tanulásával kapcsolatos, valamint a feladatra vonatkozó állításokat tartalmazott, ezen kívül a lapon kértük a tanulóktól az előző év végi osztályzatuk, kedvenc és a legkevésbé kedvelt tantárgyuk felírását.

A felmérésben 7 iskola (2 budapesti, és 5 vidéki, általános iskola, gimnázium és szakgimnázium) tanulói vettek részt. A résztvevő 1346 tanuló munkájából különböző okok miatt végül 1283 volt értékelhető.

| évfolyamok | 2. | 3. | 4. | 6. | 8. | 10. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| létszám | 186 | 213 | 243 | 303 | 124 | 277 |
| | összesen: 1346 | | | | | |

*5. táblázat:* A kísérletben résztvevő évfolyamok és létszámuk

## A kiértékelés módja és első eredmények

A tanuló megoldásokat kódoltuk, amelyhez a *Verschaffel és munkatársai* által valós szituációhoz kapcsolódó szöveges feladatok megoldásainak számbavételéhez készített kódolást vettük alapul (*Verschaffel et al.,* 1994). A vizsgálatban használt feladat (két változatának) megoldása jellegében realisztikus és valóságban elképzelhető, egyszerű matematikai ismeretekre épít, mint azok a feladatok, amelyekhez az említett kódrendszer készült, így az alapvetően használható volt.

Az eredménykódok egyrészt a megoldásról (megoldási kód), másrészt annak „hátteréről" (indoklási kód) adnak felvilágosítást, az alábbiak szerint:

*Megoldási kód:*

0: Nincs válasz azaz nincs semmi a papíron, vagy „nem tudom".

1: A várt válasz, ami a feladat szövegéből és a benne szereplő számokból következik (7 x 35 = 245).

2: Ugyanez, csak számolási hibával.

3: Realisztikus válasz. Megjelenik a valós helyzet figyelembe vétele számszerűen is, pl. „245–251 nap".

4: Egyéb válasz, például félreértésből adódó hiba: 35 nap, vagy valamilyen rossz indoklással helytelen válasz, vagy jó számolás, de rossz válasz.

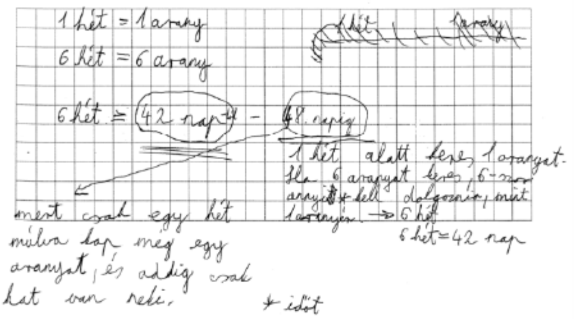
*Indoklási kód:*

1 Látszik a tétovázás, de a helyes irányban, vagy bizonytalanság a realisztikus válaszban.

0 Számolás, és/vagy végeredmény pl. 245–251, vagy 245 tétovázás nélkül.

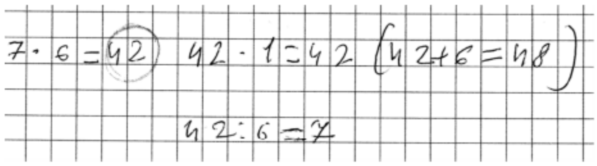
(*Verschaffel et al.,* 1994)

A következőkben tanulói megoldások segítségével mutatok be néhány kódolási esetet.



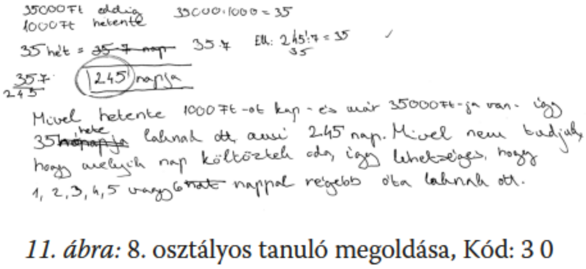
*9. ábra:* 6. osztályos tanuló megoldása, Kód: 3 0

A tanuló (*9. ábra*) az adatok felvétele után jól értelmezte a szituációt és észrevette, hogy akár több mint 42 nap is eltelhet, 6 nap legfeljebb, tehát 3 az első (megoldási) kód. Megoldásában biztos volt, nem jelezte, hogy esetleg ez a gondolat hibás lehet, tehát 0 a második kód.




*10. ábra:* 4. osztályos tanuló megoldása, Kód: 1 1

A *10. ábrán* látható megoldásban a tanuló megkapta a várható, de zárt gondolkodásra utaló 42-t. Ezért az első kód 1. A zárójelben azonban tétovázás látható, hogy esetleg más megoldás is lehet – mégpedig jó irányban gondolkodik, ezért a második kód 1.



*11. ábra:* 8. osztályos tanuló megoldása, Kód: 3 0

A megoldásra (*11. ábra*) a tanuló megkapta a 3-as kódot, hiszen egy feltételt vizsgálva, helyesen, több lehetséges számot is megad megoldásként. A válaszában bizonytalanság nem jelenik meg, így a második kód 0.

A tanulók realisztikus – a szituáció szempontjából helyesnek tekinthető – válaszadása az úgynevezett RR-módon (a realisztikus reakció) röviden is jelezhető.

A realisztikus reakciónál (RR) az előbbiek figyelembevételével a válaszkód és az indoklás kód együttese a következő kétjegyű számok lehetnek: 30, 31, 11, 21, 41.

A felmérés során 45 ilyen válasz született, az eredmények megoszlása a 6. táblázatban látható.

| | **Évfolyamok** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Kódok** | **4. (226)** | **6. (288)** | **8. (119)** | **10. (279)** | **2. (171)** | **3. (200)** |
| **3 0** | 1 | 2 A+1 | 5 | 12 | 0 | 0 |
| **1 1** | 1 | 1 | 2 | 13 | 0 | 0 |
| **2 1** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| **4 1** | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 | 1 |
| | **3** | **5** | **8** | **25** | **3** | **1** |

*6. táblázat:* Az RR-válaszok (realisztikus) száma évfolyamonként, összesen 1283 válaszból (zárójelben az egyes évfolyamok összes megoldóinak száma látható, az A jelzés a hatodik évfolyamon arra utal, hogy a jelzett két tanuló az „Aranypénzes” feladat megoldói közül való).

*Az eredmények kiértékelése még folyamatban van.* A „kedvenc” tárgyak és a válaszkódok összefüggését nézve az derült ki, hogy a 3 0 kódú határozottan RR-választ adók körében a következő a helyzet a kedvenc tárgyak esetében:

A 6. osztályosok körében a legtöbben a matematikát szeretik, de jelölték a földrajz, történelem, informatika tárgyakat is.

A 8. osztályosok is elsősorban a matematikát jelölték meg, szerepelt fizika, biológia, és földrajz is.

A 10. osztályosok körében a biológia kedveltsége megelőzte a matematikáét, majd sorrendben a történelem, (valamilyen) idegen nyelv, az informatika és a testnevelés következett.

A nem kedvelt tárgyaknál ugyanezen megoldók közül senki sem írta a matematikát.

A határozottan realisztikus válaszok a matematikából jobban teljesítők (4-es és 5-ös osztályzat) köréből kerültek ki inkább (hivatalos matematika jegy alapján). Viszont a jobban teljesítők jelentős többsége nem realisztikus választ adott.

## Értékelés, kitekintés

Ami már az első eredményekből is látszik, hogy nagyon kevés az RR-válasz, viszont a felsőbb évfolyamokon nőtt ezek száma, ahogy ez várható is volt. Az első vizsgálattal összevetve mindenképpen meg kell említeni, hogy itt „szigorúbb” az RR-válaszok besorolása, e kódrendszer szerint némelyik, akkor nyitottnak számító megoldás már nem kapott volna RR-besorolást.

A matematikáról való vélekedés és egyéb kérdések, valamint a megoldások összefüggésének statisztikai értékelése még hátravan. Izgalmas kérdés az is, hogy a hibák – ahol erre következtetni lehet az írásos anyagból – milyen gondolkodási módra engednek következtetni. Ennek pontosabb vizsgálatához még esettanulmányokat is tervezünk.

*A tanulmány a Magyar Tudományos Akadémia kibővített szakmódszertani pályázatának (2016–2020) – A Komplex Matematikatanítás a XXI. században, A matematikai gondolkodás fejlesztése a legújabb kutatási eredmények alapján – keretén belül valósult meg.*

## Felhasznált irodalom

Ambrus Gabriella (2004). Nyitott feladatok a matematikaórán, *Tanári Kincsestár* 2004, szeptember 1–26., RAABE Tanácsadó és Kiadó Kft.

Ambrus, Gabriella (2010). *Hétköznapok matematikája* 3, Munkafüzet, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

Ambrus, G. & Szűcs, K. (2016). Fehleranalyse beim Lösen von offenen Aufgaben- Ergebnisse einer empirischen Studie in der Grundschule *TMCS*, Debrecen, 2016, **14.** 1. sz., 830–113.

Ambrus, G. (2016). The Pocket Money Problem In: Ana Kuzle / Benjamin Rott / Tatjana Hodnik Čadež (Eds.). *Problem Solving in the Mathematics Classroom – Perspectives and Practices from Different Countries,* WTM Verlag, 49–59.

Blum, W. & Wiegand, B. (1999). Offene Probleme für den Mathematikunterricht-Kann man Schulbücher dafür nutzen? *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Franzbecker.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—state, trends, and issues in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, **22.** 1. sz., 37–68. https://doi.org/10.1007/BF00302716

Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, **1.** 1. sz., 45–58.

Burkhardt, H. (1994). Mathematical applications in school curriculum. In. T. Husén, & T. N. Postlethwaite (Eds.), *The international encyclopedia of education* (2nd ed.) Pergamon Press, Oxford, 3621–3624.

Büchter, A. & Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung prüfen*. Cornelsen, Berlin, 24–27.

Csíkos, Cs., Kelemen, R., & Verschaffel, L. (2011). Fifth-grade students' approaches to and beliefs of mathematics problem solving: a large sample Hungarian study. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* **43**., 561–571. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0308-7

Maaß, K. (2007). *Mathematisches Modellieren*. Cornelsen Scriptor, Berlin.

Mérő László (2001). Új észjárások, Tericum Kiadó, Budapest.

Munroe, L. (2015). The Open-Ended Approach Framework. *European Journal of Educational Research,* **4.** 3. sz., 97–104. https://doi.org/10.12973/eu-jer.4.3.97

Pehkonen, E. (1995). Introduction: Use of open-ended problems. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* **27.** 2. sz., 55–57.

Puchalska, E., & Semadeni, Z. (1987). Children's Reactions to Verbal Arithmetical Problems with Missing, Surplus or Contradictory Data, *For the Learning of Mathematics*, **7.** 3. sz. (Nov., 1987), 9–16, FLM Publishing Association, URL: http://www.jstor.org/stable/4024790

Radatz, H. (1979*). Fehleranalysen im Mathematikunterricht.* Vieweg, Braunschweig.

Reusser, K., & Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution – the social rationality of mathematical modeling in schools. *Learning and Instruction,* **7.** 4. sz., 309–327. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(97)00014-5

Schukajlow, S. (2011). *Mathematisches Modellieren. Schwierigkeiten und Strategien von Lernenden als Bausteine einer lernprozessorientierten Didaktik der neuen Aufgabenkultur*. Münster.

Silver, E. A. (1995). The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* **27.** 2. sz., 67–72.

Verschaffel, L., DeCorte, E., & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems, *Learning and Instruction*, **4.** 4. sz., 273–294.

Verschaffel, L., Van Dooren, W., Greer, B. & Mukhopadhyay, S. (2010). Reconceptualising Word Problems as Exercises in Mathematical Modelling, *Journal für Didaktik der Mathematik,* **31.** 1. sz., 9–29.

**Open reality based tasks and its variations in the teaching and in the didactical research of mathematics**

*In the mathematics teaching by choosing tasks to solve, the teaching material and the level of the group – who is participating in the solution – are the basic point of views. However, there are problems, which can be solve on several ways and the solutions differ according to the initial assumptions – these are the so called open problems. The use and importance of such problems in the mathematics didactic has been researched for a long time. In this subject I have done investigations for several years, using my self-made task for undergraduate students (Ambrus, 2010). I prepared different text-variants for the task with the same mathematical content, and I involved into my investigations with the tasks secondary school students and teacher students as well. There is a little mathematical content in the problem, however the students have difficulty by solving it, which is obviously due to the fact, that open problems are quite rarely used in the mathematics lessons.*

***Keywords****: open problems, reality based tasks, word problems, problem variation*

Ambrus Gabriella (2018): Egy nyitott, valós szituáción alapuló feladat variációi az oktatásban és a didaktikai kutatásban. *Gyermeknevelés*, **6.** 1. sz., 55–65.